VERSIERA di GAETANA AGNESI (1718-1799)

maria teresa bianchi

La costruzione geometrica parte da un circonferenza (vedi costruzione con Cabri)
La sua equazione è:

#1: $$(a^2 + x^2)\cdot y = a^3$$

Si ha quindi una **funzione razionale fratta** :

#2: $$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

Dominio: **tutti i numeri reali** poiché il denominatore è sempre diverso da zero in **R**.

#3: $$f(x) := y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

Simmetria rispetto asse y: **funzione pari**

#4: $f(x) = f(-x)$

#5: true

La funzione è simmetrica rispetto all'asse y.

Consideriamo il caso **a>0**

DOMINIO = **R**

INTERSEZIONI CON ASSI

#6: $a :\in \text{Real } (0, \infty)$

#7: $$\text{SOLVE}\left(\left[y = \frac{a^3}{a^2 + x^2},\ x = 0\right],\ [x,\ y]\right)$$

#8: $$\left[x = 0 \wedge y = a \wedge x^2 \neq - a^2\right]$$

#9: $[0,\ a]$

Il punto di intersezione con l' asse y è **A (0, a)** .

#10: $$\text{SOLVE}\left(\left[\frac{a^3}{a^2 + x^2} = 0,\ a :\in \text{Real } (0,\ \infty),\ y = 0\right],\ [x,\ y]\right)$$

#11: $[\,]$

Non ci sono punti di intersezione con l' asse x.

SEGNO DELLA FUNZIONE

#12: $$\left[\frac{a^3}{a^2 + x^2} > 0,\ a :\in \text{Real}\right]$$

#13: $$\left[\frac{a^3}{x^2 + a^2} > 0, a\right]$$

La funzione è positiva per ogni a >0.

CALCOLO DERIVATA PRIMA E RICERCA MAX E MIN RELATIVI

#14: $$\frac{d}{dx} f(x) := \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

#15: $$- \frac{2 \cdot a^3 \cdot x}{(x^2 + a^2)^2}$$

#16: $$\text{SOLVE}\left(- \frac{2 \cdot a^3 \cdot x}{(x^2 + a^2)^2}, x, \text{Real}\right)$$

#17: $$x = \pm\infty \vee x = 0$$

L' eventuale punto di max o min relativo ha ascissa 0.

#18: $$\text{SOLVE}\left(- \frac{2 \cdot a^3 \cdot x}{(x^2 + a^2)^2} > 0, x, \text{Real}\right)$$

#19: $$x < 0$$

Poiché, per x<0, la derivata è positiva, per tali valori la FUNZIONE è CRESCENTE e per x>0 la funzione è decrescente.
Il punto **(0, f(0))** e un punto di max relativo.

#20: $$y = a$$

#21: **[0, a]**

Il punto di intersezione con l' asse y è un MASSIMO RELATIVO.

CALCOLO DERIVATA SECONDA E EVENTUALI PUNTI DI FLESSO

#22: $$\frac{d}{dx}\left(- \frac{2 \cdot a^3 \cdot x}{(x^2 + a^2)^2}\right)$$

#23: $$\frac{2 \cdot a^3 \cdot (3 \cdot x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^3}$$

#24: $$\frac{2 \cdot a^3 \cdot (3 \cdot x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^3} = 0$$

#25: $$\text{SOLVE}\left(\frac{2\cdot a^{3}\cdot(3\cdot x^{2}-a^{2})}{(x^{2}+a^{2})^{3}}=0,\ x,\ \text{Real}\right)$$

#26: $$x=\pm\infty\ \vee\ x=-\frac{\sqrt{3}\cdot a}{3}\ \vee\ x=\frac{\sqrt{3}\cdot a}{3}$$

#27: $$\text{SOLVE}\left(\frac{2\cdot a^{3}\cdot(3\cdot x^{2}-a^{2})}{(x^{2}+a^{2})^{3}}>0,\ x,\ \text{Real}\right)$$

#28: $$x<-\frac{\sqrt{3}\cdot a}{3}\ \vee\ x>\frac{\sqrt{3}\cdot a}{3}$$

Ci sono **DUE PUNTI DI FLESSO** a **tangente obliqua**.

ESEMPIO a=1

#29: $$y=\frac{a^{3}}{a^{2}+x^{2}}$$

#30: $$y=\frac{1^{3}}{1^{2}+x^{2}}$$

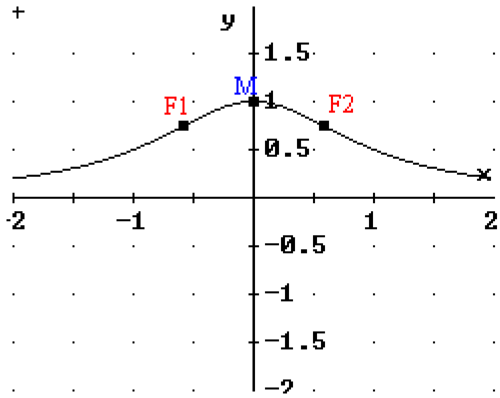
max (0, 1)
flessi $(-\sqrt{3}/3,\ f(-\sqrt{3}/3))$; $(\sqrt{3}/3,\ f(\sqrt{3}/3))$

#31: $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{bmatrix}$$

#32: $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3\cdot a^{3}}{3\cdot a^{2}+1} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3\cdot a^{3}}{3\cdot a^{2}+1} \end{bmatrix}$$

#33: $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3\cdot 1^{3}}{3\cdot 1^{2}+1} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3\cdot 1^{3}}{3\cdot 1^{2}+1} \end{bmatrix}$$

Grafico



si procede analogamente per a<0.

ESEMPIO a = -1

$$\#34: \quad y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

$$\#35: \quad y = \frac{(-1)^3}{(-1)^2 + x^2}$$

$$\#36: \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{3 \cdot 1^3}{3 \cdot 1^2 + 1} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{3 \cdot 1^3}{3 \cdot 1^2 + 1} \end{bmatrix}$$