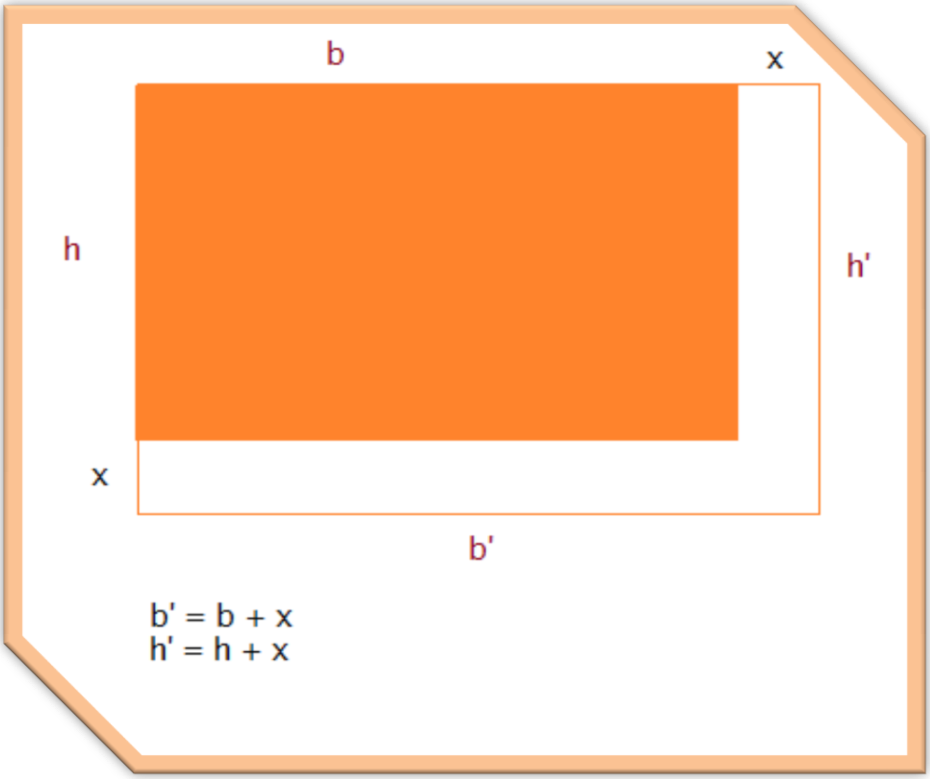
IMPARARE a generalizzare da un semplice problema

Dato un rettangolo di base **b** e altezza **h**, se si incrementano le due dimensioni di una stessa quantità, quale è la differenza dei perimetri dei due rettangoli? E quella delle aree?



$b' = b + x$

$h' = h + x$

con $x \geq 0$

DIFFERENZA dei PERIMETRI dei due rettangoli =

(PERIMETRO del RETTANGOLO di base b’ e altezza h’) – (PERIMETRO del RETTANGOLO di base b e altezza h) =

$2(b'+h') - 2(b+h) =$

$2\,[b' + h' - (b + h)] = 2\,(b + x + h + x - b - h) = 2\,(x + x) = 2\,(2x) = \mathbf{4x}$

Si osserva che la differenza dei perimetri dei due rettangoli dipende soltanto dall’incremento x dato alle dimensioni iniziali.

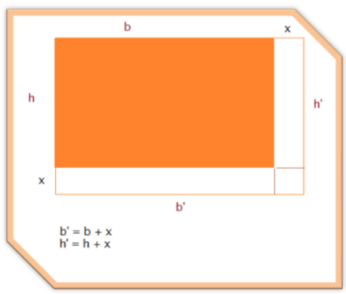
DIFFERENZA delle AREE dei due rettangoli =

(AREA del RETTANGOLO di base b’ e altezza h’) – (AREA del RETTANGOLO di base b e altezza h) =

$b'h' - bh = (b + x)(h + x) - bh = bh + bx + hx + x^2 - bh = \mathbf{bx + hx + x^2} = \mathbf{(b+h)\,x + x^2}$

Si osserva che la differenza delle aree dei due rettangoli dipende sia dalle dimensioni iniziali **b** e **h** che dall’incremento **x** dato alle dimensioni iniziali.

Osservando la figura si ha infatti che la differenza delle aree (superficie bianca) è data proprio dalla somma delle aree di due rettangoli e un quadrato: $\mathbf{bx + hx + x^2}$.



Approfondimenti:

1. Se il problema chiedesse quale è il valore dell'incremento **x** affinché il perimetro del rettangolo si incrementi di **P** u basta impostare un'equazione ponendo **la differenza dei perimetri uguale a P**:

$$4x = P$$

L'equazione è di **primo grado** e, risolvendo, si ha:

$$\mathbf{x = \frac{P}{4}}$$

Esempio:

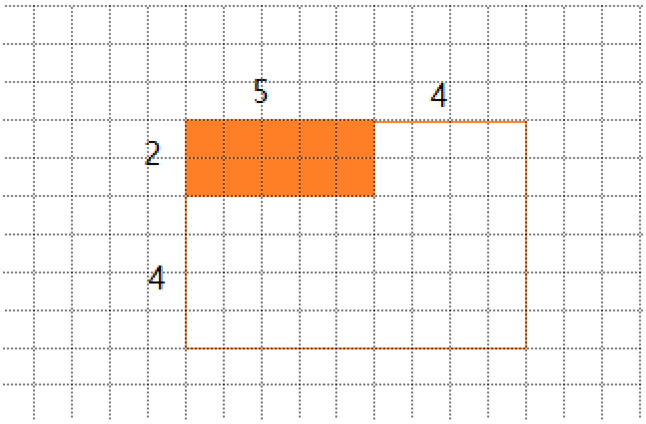
Dimensioni iniziali del rettangolo: b = 5 u, h = 2 u

Incremento del perimetro: P = 16 u

$$\mathbf{x = \frac{16}{4} = 4\,\boldsymbol{u}}$$

Dimensioni del nuovo rettangolo: b' =5+4= **9** u e h' = 2+4 = **6** u

Perimetro$_1$ = 14 u
Perimetro$_2$ = 30 u
La loro differenza è **16** u.



2. Se il problema chiedesse quale è il valore dell'incremento **x** affinché l'area del rettangolo si incrementi di **A** u^2 basta impostare un'equazione ponendo **la differenza delle aree uguale ad A**:

$$(b+h)\,x + x^2 = A$$
$$x^2 + (b+h)\,x - A = 0$$

L'equazione è di secondo grado e, risolvendo con la formula risolutiva, si ha:

$$x = \frac{-(b+h) \pm \sqrt{(b+h)^2 + 4A}}{2}$$

Si osserva che $\mathbf{\Delta = (b+h)^2 + 4A}$ è sicuramente **positivo** in quanto somma di due addendi positivi.

L'equazione ha quindi due soluzioni reali e distinte x_1 e x_2 e, per il Teorema di Cartesio, una negativa e una positiva:

$$x_1 = \frac{-(b+h) - \sqrt{(b+h)^2 + 4A}}{2}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{-(b+h) + \sqrt{(b+h)^2 + 4A}}{2}}$$

La soluzione negativa (x_1) **non è accettabile** perché **x≥0**, mentre **è accettabile** la soluzione $\mathbf{x_2}$.

Esempio:

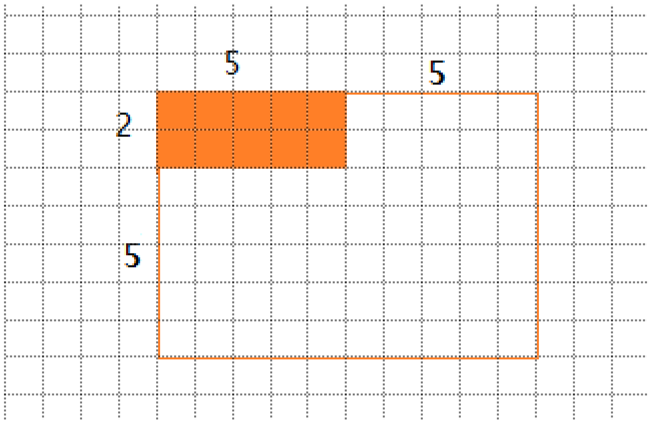
Dimensioni iniziali del rettangolo: b = 5 u, h = 2 u

Incremento dell'area: A = 60 u^2

Avendo risolto il problema in generale, si possono direttamente sostituire i valori di b, h e A in x_2 e trovare la soluzione:

$$x_2 = \frac{-(5+2)+\sqrt{(5+2)^2+4\cdot 60}}{2} = \frac{-7+\sqrt{289}}{2} = \frac{-7+17}{2} = \frac{10}{2} = \mathbf{5\ u}$$

Dimensioni del nuovo rettangolo: b' =5+5= **10** u e h' = 2+5 = **7** u



Area₁ = 10 u^2

Area₂ = 70 u^2

La loro differenza è **60** u^2.

Prerequisiti

Geometria elementare: il rettangolo, il suo perimetro e la sua area

Semplici operazioni con monomi e polinomi

Equazioni di primo grado

Equazioni di secondo grado

Obiettivi

Interpretare il testo di un problema

Modellizzare un problema (Modello matematico)

Risolvere equazioni di 1° e 2° grado

Analizzare e discutere le soluzioni

Gli spunti per tali riflessioni sono emerse in classe dopo lo svolgimento di un semplice problema per introdurre le equazioni di secondo grado.

Un rettangolo ha le dimensioni di 5 cm e 2 cm. Vogliamo incrementare la base e l'altezza di una stessa quantità in modo da ottenere un secondo rettangolo che abbia l'area di 70 cm^2. Determina tale quantità.

E' stato scritto il Modello Matematico

$$\begin{cases} b' = b + x \\ h' = h + x \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b' = 5 + x \\ h' = 2 + x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Area del *nuovo* rettangolo: $b' \cdot h' = 70 \qquad (5 + x) \cdot (2 + x) = 70$

Si è giunti, dai calcoli, ad un'equazione di secondo grado completa:

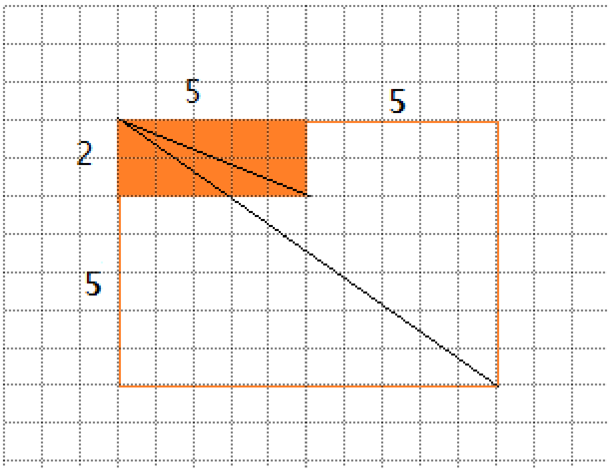
$$\boldsymbol{x^2 + 7x - 60 = 0}$$

L'equazione di secondo grado è stata svolta per scomposizione in quanto non è stata ancora introdotta la formula risolutiva delle equazioni di 2° grado:

$$(x + 12) \cdot (x - 5) = 0$$
$$x + 12 = 0 \ , \ x - 5 = 0$$
$\boldsymbol{x = -12}$ *e* $\boldsymbol{x = 5}$ sono le due soluzioni dell'equazione

La soluzione accettabile è $\boldsymbol{x = 5}$ in quanto positiva come richiesto dal vincolo **x≥0**.

In classe sono state fatte tutte le considerazioni di cui alle pagine precedenti esclusa la soluzione generale di **x^2 + (b+h) x - A = 0**
(non è stata ancora introdotta la formula risolutiva delle equazioni di 2° grado).



Sono state, poi, tracciate anche le **diagonali** dei due rettangoli e si è determinato il loro valore con il Teorema di Pitagora.

$d_1 = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ cm

$d_2 = \sqrt{100 + 49} = \sqrt{149}$ cm

I risultati ottenuti hanno dato lo spunto per parlare ancora di **numeri irrazionali**.

Si è, inoltre osservato che i triangoli rettangoli determinati da b, h, d e b', h', d' **non sono simili**.

Se due triangoli hanno rispettivamente in proporzione due lati e se l'angolo fra di essi compreso è congruente, sono simili.

Gli angoli compresi tra base ed altezza di ciascun rettangolo sono angoli retti, quindi congruenti, ma

$\frac{b}{h} \neq \frac{b'}{h'} \qquad \frac{5}{2} \neq \frac{10}{7} \qquad 2{,}5 \neq 1{,}42...$ I triangoli **non sono simili.**